

盾构隧道壁后注浆浆液时变半球面扩散模型

叶 飞, 苟长飞, 刘燕鹏, 孙海东

(长安大学 桥梁与隧道陕西省重点实验室, 陕西 西安 710064)

摘要: 在假定注浆浆液为粘度时变性流体且浆液沿半球面扩散的前提下, 应用达西定律对盾构管片注浆扩散半径及浆液对管片产生的压力进行了理论推导, 得到了浆液扩散半径及对管片产生的压力的计算式. 通过具体实例, 对比分析了考虑浆液粘度时变性和不考虑浆液粘度时变性 2 种条件下注浆压力、注浆时间、浆液初始粘度、土体渗透系数对浆液扩散半径及浆液压力的影响, 得到了浆液压力的分布形式. 分析结果表明, 注浆压力和土体渗透系数较大且注浆时间较长时, 浆液的粘度时变性对浆液扩散范围和压力的影响显著; 可通过调整注浆压力、注浆时间、浆液特性来调整注浆效果.

关键词: 盾构隧道; 壁后注浆; 粘度时变性; 半球面扩散
中图分类号: U451 **文献标识码:** A

Half-spherical Surface Diffusion Model of Shield Tunnel Back-filled Grouts

YE Fei, GOU Changfei, LIU Yanpeng, SUN Haidong
(Shaanxi Provincial Major Laboratory for Highway Bridge & Tunnel, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: On the assumption that the back-filled grouts should be viscosity degeneration fluids, and the grouts diffuse with half-spherical surface, the grouts diffusion area and the pressure to shield tunnel segments were derived with Darcy's law. As a result, the formula to calculate the radius and the pressure were acquired. The diffusion radius and the pressures to shield tunnel segments with different grouting pressures, grouting time, grouts initial viscosities, and soil permeability coefficients were compared between the grouts viscosity degeneration condition being taken into consideration or not. The diffusion model of grouts pressure is also acquired. The result shows that the grouts viscosity degeneration has a significant influence on the diffusion radius and the pressure to shield tunnel segments on the condition of high grouting pressure, long grouting time, and big soil permeability coefficient. The grouting effect can be improved by adjusting grouting pressure, grouting time and grouts

properties.

Key words: shield tunnel; back-filled grouting; viscosity degeneration; half-spherical surface diffusion

在盾构隧道施工中, 为了在控制地层变形和地表下沉的同时防止管片渗漏水, 并获得管片环的早期稳定和防止隧道的蛇行等, 必须进行壁后注浆. 目前, 在盾构壁后注浆领域, 由于实际过程中的复杂性, 所以导致理论远远滞后于应用. 关于盾构壁后注浆的研究中, 对于浆液本身特性及注浆施工方法、浆液分布及施工效果检验、浆液和管片对周围土体产生的荷载等方面的研究较多, 对于浆液扩散机理的研究则较少. 以下学者对浆液扩散机理做了研究: 李志明等^[1]分别采用牛顿流体及宾汉姆流体推导出土压平衡盾构在粘土地层中同步注浆环向填充及纵向填充的力学模型及计算方法; 袁小会等^[2-3]用宾汉姆流体描述硬性浆液的流变特性, 推导了壁后注浆过程中注浆压力衰减与注浆距离和注浆时间的关系以及注浆时间与扩散距离的关系; 白云等^[4]基于牛顿流体模型, 以单位时间内形成的盾尾间隙为浆液填充的横断面, 推导了四孔充填注浆时盾尾间隙横断面内浆液压力的分布模型; 叶飞等^[5-6]通过引入等效孔隙率替代土体本身的孔隙率来考虑建筑间隙的影响, 分别基于球面和柱面扩散理论推导了浆液渗透扩散半径及对管片产生的压力计算式.

从以上综述可见, 目前对于浆液扩散机理的研究都基于牛顿流体或宾汉姆流体, 并未考虑浆液粘度随时间变化的特性. 本文基于球面渗透扩散理论并考虑浆液的粘度时变特性推导盾构壁后注浆扩散范围及浆液对管片产生的压力计算式, 在此基础上分析相关参数对注浆效果的影响.

收稿日期: 2011-11-06

基金项目: 国家自然科学基金(51178052; 50808020); 中央高校基本科研业务费专项基金(CHD2011JC099)

第一作者: 叶 飞(1977—), 男, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为隧道及地下工程. E-mail: xianyefei@sohu.com

1 半球面扩散模型建立

1.1 基本假设

(1) 浆液不可缩、均质及各向同性且粘度存在时变性,其变化关系为指数函数, t 时刻浆液的粘度 $\mu_g(t)$ 可以用指数函数表示为^[7-8]

$$\mu_g(t) = \mu_{g0} e^{\alpha t} \quad (1)$$

式中: μ_{g0} 为浆液的初始粘度,Pa·s; α 为与浆液、介质的孔隙率有关的参数, s^{-1} ; t 为浆液拌合时间,s.

(2) 忽略盾构管片曲率影响,将盾构外沿视为平面,浆液在渗透范围内以注浆孔为球心、以半球形向四周扩散,见图1,图中, P_w 为注浆点处地下水压力, P_g 为圆心处的注浆压力.

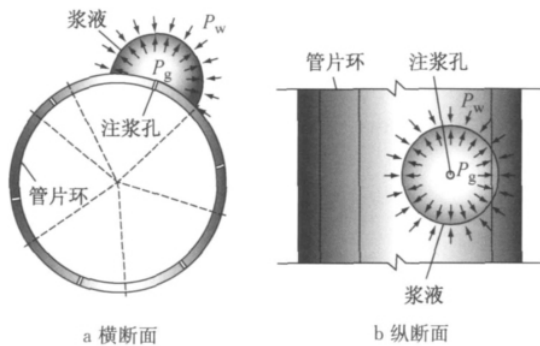


图1 管片壁后注浆半球面扩散模型示意

Fig.1 Half-spherical surface diffusion model of back-filled grouting

(3) 在盾尾管片壁后注浆中,盾尾间隙的存在致使在一定范围内的孔隙率加大,从而影响到浆液的扩散过程.本文采用文献[5-6]提出的用土体等效孔隙率 n' 替代砂土层本身的孔隙率 n 以考虑盾尾间隙的影响.

1.2 理论推导

浆液在地层中的渗透系数 $K_g(t)$ 可表示为

$$K_g(t) = K_w / \beta(t) \quad (2)$$

式中: K_w 为水在砂性土中的渗透系数; $\beta(t)$ 为 t 时刻浆液粘度与水的粘度 μ_w 之比, $\beta(t) = \mu_g(t) / \mu_w$,由此可得考虑浆液粘度时变性的渗透系数

$$K_g(t) = K_w \mu_w \mu_{g0}^{-1} e^{-\alpha t} = K_w \beta_0^{-1} e^{-\alpha t} \quad (3)$$

式中: β_0 为浆液初始粘度与水的粘度比, $\beta_0 = \mu_{g0} / \mu_w$.设 t 时刻在 r (浆液扩散半径)与 $r+dr$ 之间浆液稳定渗透扩散,其渗流运动方程为

$$v = -K_g(t) dh/dr \quad (4)$$

式中: v 为浆液扩散速率; h 为浆液压力水头高度.

将式(3)代入式(4)得

$$dh = -\beta_0 v K_w^{-1} e^{\alpha t} dr \quad (5)$$

又因 $dh = dP/\rho g$,式(5)可化为

$$dP = -\beta_0 \rho g v K_w^{-1} e^{\alpha t} dr \quad (6)$$

式中: P 为浆液压力; ρ 为浆液密度.浆液呈半球面扩散时,其扩散速率可表示为

$$v = q/A = q/(2\pi r^2)^{-1} \quad (7)$$

式中: q 为弹孔浆液流量; A 为浆液半球面面积.将式(7)代入式(6)可得

$$dP = -\beta_0 \rho g q (2K_w e^{-\alpha t} \pi r^2)^{-1} dr \quad (8)$$

根据边界条件,在注浆孔半径 r_0 处浆液压力为 P_g ;当浆液扩散半径达到 r 时,浆液压力为 P_r .因而有

$$q = \frac{2\pi K_w e^{-\alpha t} (P_g - P_r)}{\beta_0 \rho g (r_0^{-1} - r^{-1})} \quad (9)$$

对式(9)从0到 t 积分,得 t 时刻的注浆量

$$Q = \int_0^t q dt = \frac{2\pi K_w (P_g - P_r)}{\beta_0 \rho g (r_0^{-1} - r^{-1})} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \quad (10)$$

将 $Q = 2\pi r^3 n'/3$ 代入式(10)得浆液压力分布公式.

$$P_r = P_g - \frac{r^3 \beta_0 \rho g n'}{3K_w} (r_0^{-1} - r^{-1}) \cdot \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha t}} \quad (11)$$

令 $P_r = P_w$,并记 $P_g - P_w = \Delta P$,同时考虑 $r \gg r_0$,则由式(11)可得浆液扩散半径

$$r = \sqrt[3]{\frac{3K_w \Delta P r_0}{\beta_0 \rho g n'} \cdot \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}} \quad (12)$$

由式(11)可得浆液对管片产生的压力

$$F_g = \pi r^2 P_g + \frac{\pi \beta_0 \rho g}{K_w} \left[-\frac{2n}{15r_0} r^5 - \frac{d(1-n)}{4r_0} r^4 + \frac{n}{6} r^4 + \frac{d(1-n)}{3} r^3 \right] \cdot \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha t}} \quad (13)$$

式中, d 为盾尾间隙厚度.式(11)~(13)为考虑浆液粘度时变性条件下管片注浆半球面扩散理论的基本公式.

1.3 参数确定及适用范围

(1) 参数确定.对于盾构隧道壁后注浆的粘度时变性浆液半球面扩散模型即式(11)~(13)中相关参数的确定如下:① n' 根据文献[5-6]由式(14)计算;②参数 α 与 β_0 可通过浆液试验得到.

$$n' = n + 3d(1-n)/2r \quad (14)$$

(2) 适用范围.本文提出的粘度时变性浆液的半球面扩散模型适用于砂性土盾构隧道的单液浆管片注浆.由该模型推导得到的式(11)~(13)可为盾构壁后注浆施工中相关参数的确定提供理论依据.

2 实例分析

由文献[5-6]及考虑浆液粘度时变性条件下管

片注浆半球面扩散理论的基本公式可以看出:壁后注浆浆液的扩散半径及对管片产生的压力与注浆压力、注浆时间、浆液粘度、土体渗透率、盾尾间隙厚度、注浆管半径等众多因素有关。以下分别应用文献[5-6]及本文公式,通过实例分析讨论盾构隧道壁后注浆的扩散半径及对管片产生的压力与各因素的关系。假定 $r_0 = 2.5 \text{ cm}$, $n = 20\%$, $K_w = 5 \times 10^{-4} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$, $\beta_0 = 4$, $d = 10 \text{ cm}$, $P_w = 0 \text{ MPa}$, 由文献[20-21]的试验数据取 $\alpha = 1/6\ 000 \text{ s}^{-1}$ 。

2.1 不同注浆压力

当注浆时间 $t = 30 \text{ min}$ 时,则由式(12)和式(13)可求得各种注浆压力条件下的浆液的扩散半径及浆液对管片产生的注浆压力,如图 2~4 所示。

由图 2 可知,浆液扩散半径在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随注浆压力的增大而增大。当注浆压力由 0.1 MPa 增大到 0.5 MPa 时扩散半径在考虑时变性条件下增加了不到 1 倍,在不考虑时变性条件下也增加了不到 1 倍。但是,在相同注浆压力下,考虑时变性的计算值略小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随注浆压力的增大而略有增大。

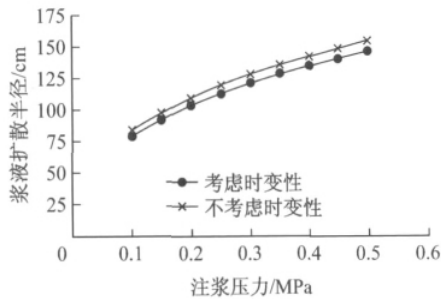


图 2 浆液扩散半径与注浆压力关系

Fig. 2 Relationship between diffusion radius and grouting pressure

由图 3 可知,浆液对管片产生的压力在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随注浆压力的增大而增大。当注浆压力由 0.1 MPa 增大到 0.5 MPa 时浆液对管片产生的压力在考虑时变性和不考虑时变性条件下均增加了约 16 倍。但是,在相同注浆压力下,考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随着注浆压力的增大而增大。

由图 4 可知,在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下所得的浆液对单位面积管片的压力与注浆压力的关系曲线重合,且近似呈直线。浆液对单位面积管片的压力在 2 种条件下的计算值几乎相同,都

随注浆压力的增大而增大。

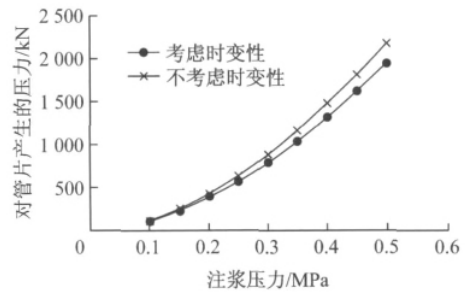


图 3 对管片产生的压力与注浆压力关系

Fig. 3 Relationship between pressure to segments and grouting pressure

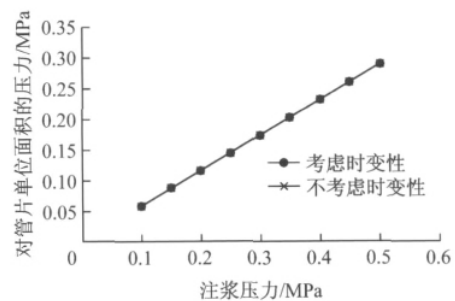


图 4 对管片单位面积的压力与注浆压力关系

Fig. 4 Relationship between intensity of pressure to segments and grouting pressure

由图 2~4 的分析可以发现,当注浆压力由 0.1 MPa 增大到 0.5 MPa 时浆液扩散半径仅增加不到 1 倍。但是,浆液对管片产生的压力却增加了十几倍,浆液对单位面积管片的压力也呈直线上升。这说明,在盾构壁后注浆施工中,单靠增加注浆压力来改善注浆效果应慎重,因为增大注浆压力的同时也大大增加了浆液对管片的压力,如果因施工要求确实需要用较大的注浆压力则需对管片环进行承受因注浆而产生的附加压力的结构计算。

2.2 不同注浆时间

当注浆压力 $P_g = 0.3 \text{ MPa}$ 时,则由式(12)和式(13)可求得不同注浆时间的浆液的扩散半径及浆液对管片产生的压力,如图 5~7 所示。

由图 5 可知,浆液扩散半径在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随注浆时间的延长而增大。当注浆时间由 10 min 延长到 90 min 时扩散半径在 2 种条件下的计算值均增加了约 1 倍。但是,在相同注浆压力下考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随注浆压力的增大而增大。

由图 6 可知,浆液对管片产生的压力在考虑时

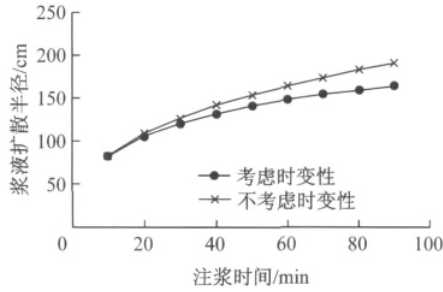


图 5 浆液扩散半径与注浆时间关系曲线
Fig.5 Relationship between diffusion radius and grouting time

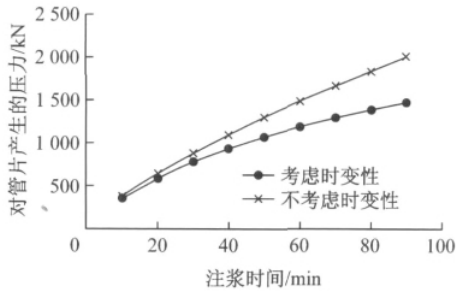


图 6 对管片产生的压力与注浆时间关系
Fig.6 Relationship between pressure to segments and grouting time

变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随注浆时间的延长而增大. 当注浆时间由 10 min 延长到 90 min 时浆液对管片产生的压力在考虑时变性条件下增加了约 3 倍;在不考虑时变性条件下增加了 4 倍多. 在相同注浆时间下,考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随着注浆时间的延长而增大.

由图 7 可知,在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下所得的浆液对单位面积管片的压力与注浆压力的关系曲线重合,且近似呈水平直线. 浆液对单位面积管片的压力在 2 种条件下的计算值几乎相同,都不随注浆压力变化.

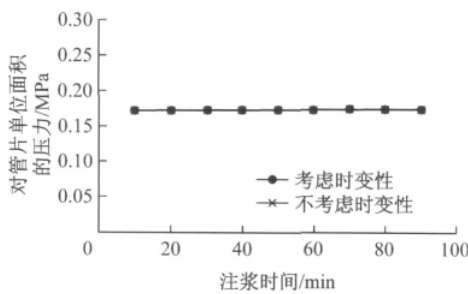


图 7 对管片单位面积的压力与注浆时间关系
Fig.7 Relationship between intensity of pressure to segments and grouting time

由图 5~7 的分析可以发现,当注浆时间由 10 min 延长到 90 min 时浆液扩散半径仅增加了约 1 倍,浆液对管片产生的压力增加了 3~4 倍,浆液对单位面积管片的压力几乎保持不变. 这说明在盾构壁后注浆施工中可通过适当延长注浆时间来改善注浆效果. 但是,注浆时间受浆液凝胶时间限制,因此,应结合凝胶时间来调整注浆时间.

2.3 不同初始粘度

当注浆时间 $t=30$ min 时由式(12)和式(13)可求得不同初始粘度浆液的扩散半径及浆液对管片产生的压力,如图 8~10 所示.

由图 8 可知,浆液扩散半径在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随浆液粘度的增大而减小. 当浆液初始粘度与水的粘度比从 2 增大到 10 时扩散半径在 2 种条件下计算值均减小了约 50%. 在相同浆液初始粘度下考虑时变性的计算值略小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随浆液粘度的增大而逐渐减小.

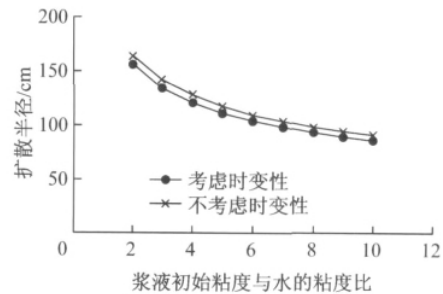


图 8 浆液扩散半径与浆液粘度关系
Fig.8 Relationship between diffusion radius and grouts viscosity

由图 9 可知,浆液对管片产生的压力在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随浆液初始粘度的增大而减小. 当浆液初始粘度与水的粘度比从 2 增大到 10 时,浆液对管片产生的压力在 2

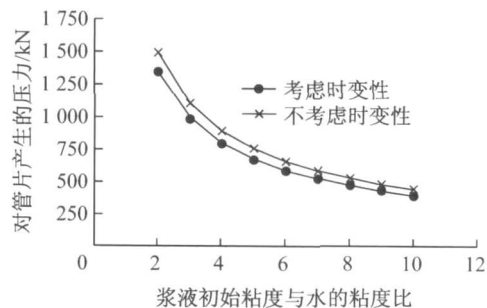


图 9 对管片产生的压力与浆液粘度关系
Fig.9 Relationship between pressure to segments and grouts viscosity

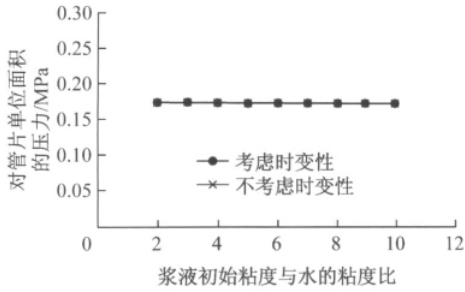


图 10 对管片单位面积的压力与浆液粘度关系曲线
Fig. 10 Relationship between intensity of pressure to segments and grouts viscosity

种条件下的计算值均减小了约 70%。但是,在相同初始粘度下考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随着浆液粘度的减小而增大。

由图 10 可知,在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下所得的浆液对单位面积管片的压力与浆液初始粘度的关系曲线重合,且近似呈水平直线。浆液对单位面积管片的压力在 2 种条件下的计算值几乎相同,都不随浆液初始粘度变化。

由图 8~10 的分析可以发现,当浆液初始粘度与水的粘度比从 2 增大到 10 时浆液扩散半径减小了约 50%,浆液对管片产生的压力减小了约 70%,浆液对管片单位面积的压力几乎保持不变。这说明浆液粘度对壁后注浆扩散半径影响明显,对浆液对管片产生的压力影响较小,可通过选择合适粘度的浆液来调整盾构隧道壁后注浆效果。

2.4 不同渗透系数

当注浆时间 $t=30 \text{ min}$ 时由式(12)和式(13)可求得不同渗透系数土体中浆液的扩散半径及浆液对管片产生的压力,如图 11~13 所示,图中, K 为土体渗透系数。

由图 11 可知,浆液扩散半径在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随土体渗透系数

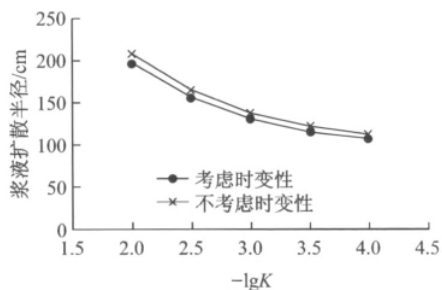


图 11 浆液扩散半径与土体渗透系数关系
Fig. 11 Relationship between diffusion radius and soil infiltration rate

的增大而增大。当渗透系数由 $10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 增大到 $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时,扩散半径在 2 种条件下计算值均增加了不到 1 倍。但是在相同渗透系数下考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随渗透系数的增大而增大。

由图 12 可知,浆液对管片产生的压力在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下的计算值都随土体渗透系数的增大而增大。当渗透系数由 $10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 增大到 $10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时浆液对管片产生的压力在 2 种条件下的计算值均增加了 2 倍多。但是,在相同渗透系数下考虑时变性的计算值小于不考虑时变性的计算值,且两者的差距随渗透系数的增大而增大。

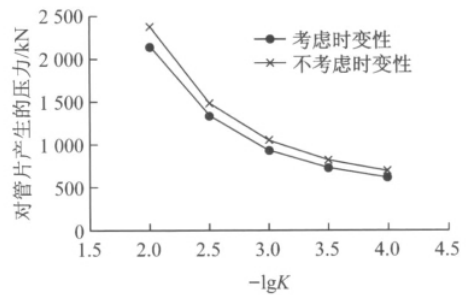


图 12 对管片产生的压力与土体渗透系数关系
Fig. 12 Relationship between pressure to segments and soil infiltration rate

由图 13 可知,在考虑时变性和不考虑时变性 2 种条件下所得的浆液对单位面积管片的压力与土体渗透系数的关系曲线几乎重合,且近似呈水平直线。浆液对管片单位面积的压力在 2 种条件下的计算值几乎相同,均不随渗透系数变化。

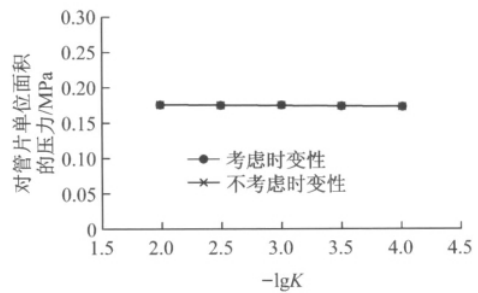


图 13 对单位面积的压力与土体渗透系数关系
Fig. 13 Relationship between intensity of pressure to segments and soil infiltration rate

由图 11~13 可知,土体渗透系数对注浆效果有较大影响,渗透系数越大,浆液扩散半径越大,对管片产生的压力也越大。说明在盾构隧道壁后注浆设计中土体本身的特性不可忽视,换言之,在盾构隧道掘进中应该随土性的变化调整注浆施工参数和浆液

参数,在大断面盾构隧道施工中,同一横断面不同注浆点处的土性参数也会不同,也应区别对待。

3 浆液压力分布

假定 $P_g=0.3 \text{ MPa}$, $t=30 \text{ min}$, 求出 2 种条件下管片承受的浆液压力与浆液扩散半径的关系,如图 14。

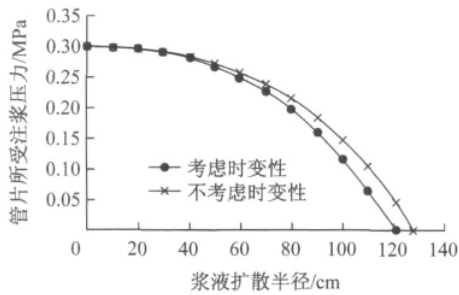


图 14 管片所受注浆压力与浆液扩散半径的关系

Fig. 14 Relationship between pressure to segments and grouts diffusion radius

从图 14 可知,对于盾构隧道管片注浆,考虑浆液粘度时变性和不考虑浆液粘度时变性 2 种条件下浆液对管片产生的压力都呈抛物线形分布,但考虑时变性时注浆压力和扩散半径小于不考虑时变性时,浆液压力的差距随扩散半径的增大而增大。可见浆液粘度时变性对注浆压力分布影响比较显著。考虑浆液粘度时变性时管片所受的注浆压力及浆液的扩散面积均减小,由此导致浆液对管片产生的压力减小;由于浆液对管片产生的压力与浆液扩散面积同步减小,所以管片单位面积所受的浆液压力保持不变。

4 结论

(1) 浆液扩散半径、浆液对管片产生的压力受浆液粘度时变性影响明显,其显著程度随浆液压力和土体渗透系数的增大、注浆时间的延长、浆液粘度的减小而增大;浆液对单位面积管片的压力几乎不受浆液粘度时变性影响。

(2) 浆液的扩散半径和浆液对管片产生的压力在考虑浆液粘度时变性条件下的计算值小于不考虑时变性条件下的计算值;浆液对单位面积管片的压力在 2 种条件下的计算值相同。

(3) 在盾构壁后注浆施工中可通过增大注浆压力、延长注浆时间、调整浆液粘度等方式来改善注浆

效果。但是,增大注浆压力时应慎重,因为增大注浆压力的同时也大大增加了浆液对管片的压力。

(4) 在管片注浆时,随着浆液远离注浆孔,浆液压力逐步减小,减小的速率逐步增大,浆液压力分布呈抛物线形式。

参考文献:

- [1] 李志明, 廖少明, 戴志仁. 盾构同步注浆填充机理及压力分布研究[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(11): 1752.
LI Zhiming, LIAO Shaoming, DAI Zhiren. Theoretical study on synchronous grouting filling patterns and pressure distribution of EPB shield tunnels [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(11): 1752.
- [2] 袁小会, 韩月旺, 钟小春. 盾构隧道壁后注浆压力分布模型[J]. 西南交通大学学报, 2011, 46(1): 18.
YUAN Xiaohui, HAN Yuewang, ZHONG Xiaochun. Pressure distribution model of simultaneous backfill grouting of shield tunnel[J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2011, 46(1): 18.
- [3] 范昭平, 韩月旺, 方忠强. 盾构壁后注浆压力分布计算模型[J]. 公路交通科技, 2011, 28(3): 95.
FAN Zhaoping, HAN Yuewang, FANG Zhongqiang. Calculating model of backfill grouting pressure distribution for shield tunnel [J]. Journal of highway and Transportation Research and Development, 2011, 28(3): 95.
- [4] 白云, 戴志仁, 张莎莎, 等. 盾构隧道同步注浆浆液压力扩散模式研究[J]. 中国铁道科学, 2011, 32(4): 38.
BAI Yun, DAI Zhiren, ZHANG Shasha, et al. Study on the grout pressure dissipation mode in simultaneous backfill grouting during shield tunneling[J]. China Railway Science, 2011, 32(4): 38.
- [5] 叶飞. 软土盾构隧道施工期上浮机理分析及控制研究[D]. 上海: 同济大学, 2007.
YE Fei. Analysis and control for upward movement of shield tunnel during construction[D]. Shanghai: Tongji University, 2007.
- [6] 叶飞, 朱合华, 何川. 盾构隧道壁后注浆扩散模式及对管片的压力分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(5): 1307.
YE Fei, ZHU Hehua, HE Chuan. Back-filled grouts diffusion model and its pressure to segments of shield tunnel [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(5): 1307.
- [7] 阮文军. 注浆扩散与浆液若干基本性能研究[J]. 岩土工程学报, 2005, 21(1): 69.
RUAN Wenjun. Research on diffusion of grouting and basic properties of grouts [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 21(1): 69.
- [8] 阮文军. 基于浆液粘度时变性的岩体裂隙注浆扩散模型[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(15): 2709.
RUAN Wenjun. Spreading model of grouting in rock mass fissures based on time-dependent behavior of viscosity of cement-based grouts[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(15): 2709.